TEMA NR. 6
pagina 1

FORME BILINIARE, FORME LINIARE ȘI FORME PĂTRATICE

Probleme rezolvate

(1). Să se aducă la forma canonică prin trei metode, forma pătratică $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, definită prin

$$h(\vec{x}) = 5x_1^2 + 6x_2^2 + 4x_3^2 - 4x_1x_2 - 4x_1x_3,$$

determinându-se totodată și baza în care, prin metoda folosită, forma pătratică $h(\vec{x})$ are expresie (formă) canonică.

Rezolvare. O formă pătratică se scrie, într-o bază dată, în felul următor:

$$h(\vec{x}) = X^T G X,$$

unde X este matricea coloană a coordonatelor vectorului $\vec{x}$ în baza care rezultă din enunț, iar G este o matrice pătratică simetrică, $G = G^T$, de ordin egal cu dimensiunea spațiului pe care este definită funcția h.

În fond, o formă pătratică este o funcție reală de n variabile reale, de o expresie particulară (polinom omogen de gradul 2 în variabilele $x_1, x_2, \dots, x_n$).

Amintim că o astfel de formă pătratică (poate fi) este valoarea în perechea $(\vec{h}, \vec{h})$, $\vec{h} = (h_1, \dots, h_n) \in \mathbb{R}^n$, a diferențialei a doua în x_0 a funcției

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_n),$$

notată $d^2 f(\vec{x}_0)(\vec{h}, \vec{h}) = d^2 f(\vec{x}_0; \vec{h}, \vec{h}) = \varphi(\vec{h})$, unde

TEMA NR. 6

pagina 2

$$\varphi(\vec h) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(\vec x_0)(h_1)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(\vec x_0)\, h_1 h_2 + \cdots + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(\vec x_0) h_1 h_n +$$
$$+ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(\vec x_0)(h_2)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_3}(\vec h)\, h_2 h_3 + \cdots + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n}(\vec x_0) h_2 h_n +$$
$$\cdots\cdots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(\vec x_0)(h_n)^2$$

Matricea G a formei pătratice $\varphi(\vec h)$ a fost notată în semestrul I cu $H_f(\vec x_0)$ și s-a numit "hessiana" funcției f în punctul staționar $(df(\vec x_0)=0)$ $\vec x_0$. Dacă elementele lui G sunt g_{ij}, $1\le i \le n$, $1 \le j \le n$, atunci

$$g_{ij} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\vec x_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(\vec x_0) = g_{ji}.$$

În cazul problemei enunțate, matricea G este

$$G = \begin{pmatrix} 5 & -2 & -2 \\ -2 & 6 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Efectuând $\det G$, constatăm că $\det G = 80 \neq 0$ deci forma pătratică dată este <u>nedegenerată</u> sau, altfel spus, are rangul egal cu dimensiunea spațiului, adică 3. Tot atât este și rang G.

Prin urmare în expresia canonică pe care o vom găsi printr-o metodă dintre cele cunoscute, numărul pătratelor va fi 3, adică $h(\vec x') = \lambda_1 x_1'^2 + \lambda_2 x_2'^2 + \lambda_3 x_3'^2$.

Să folosim întâi <u>metoda valorilor și vectorilor proprii</u>. Trebuie să determinăm mai întâi valorile proprii ale operatorului

liniar $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ care în baza canonică din $\mathbb{R}^3$ are matricea G. Expresia lui $T(\vec{x})$ este

$$T(\vec{x}) = \left(5x_1 - 2x_2 - 2x_3,\ -2x_1 + 6x_2,\ -2x_1 + 4x_3\right).$$

<u>Polinomul caracteristic</u> $P(\lambda)$ se știe că este

$$P(\lambda) = \det\left(G - \lambda I_3\right) = \begin{vmatrix} 5-\lambda & -2 & -2 \\ -2 & 6-\lambda & 0 \\ -2 & 0 & 4-\lambda \end{vmatrix}$$

Acesta se obține calculând determinantul matricei obținută din G prin scăderea lui λ pe diagonala principală.

Se găsește

$$P(\lambda) = -\lambda^3 + 15\lambda^2 - 68\lambda + 80$$

Să remarcăm că acest polinom caracteristic are drept coeficienți:

- coeficientul lui λ^3 este $(-1)^3 = -1$;
- coeficientul lui λ^2 este $(-1)^2 \operatorname{tr} G = \operatorname{tr} G$, unde "tr" înseamnă "urma" matricei G, adică suma elementelor de pe diagonala sa principală;
- coeficientul lui λ este $(-1)^1 \cdot$ suma tuturor minorilor de ordinul 2 care au diagonala principală extrasă din diagonala lui G, adică

$$\begin{vmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 6 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} =$$

$$= 26 + 16 + 24 = 66;$$

- coeficientul lui λ^0 (termenul liber) este $(-1)^0 \cdot \det G$, adică 80.

Ecuația $P(\lambda) = 0$ se numește <u>ecuație caracteristică</u>

TEMA NR. 6

pagina 4

După înmulțirea cu (-1), obținem

$$\lambda^3 - 15\lambda^2 + 66\lambda - 80 = 0$$

Folosind "schema lui Horner" găsim că rădăcinile sunt $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 5$, $\lambda_3 = 8$. Aceste rădăcini sunt <u>valorile proprii</u> căutate.

Determinăm <u>vectorii proprii</u> corespunzători valorilor proprii găsite. Trebuie să rezolvăm sistemele liniare și omogene:

$$(A - \lambda_1 I_3)\underline{X} = 0; \quad (A - \lambda_2 I_3)\underline{X} = 0; \quad (A - \lambda_3 I_3)\underline{X} = 0,$$

în care I_3 este matricea unitate de ordin 3, iar $\underline{X}$ este matricea coloană a coordonatelor vectorului $\vec{x}$ în baza canonică $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1 = (1,0,0), \vec{e}_2 = (0,1,0), \vec{e}_3 = (0,0,1)\} \subset \mathbb{R}^3$. Aceste sisteme sunt:

$\lambda_1 = 2$: $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 - 2x_3 = 0 \\ -2x_1 + 4x_2 = 0 \\ -2x_1 + 2x_3 = 0 \end{cases}$; $\lambda_2 = 5$: $\begin{cases} -2x_2 - 2x_3 = 0 \\ -2x_1 + x_2 = 0 \\ -2x_1 - x_3 = 0 \end{cases}$; $\lambda_3 = 8$: $\begin{cases} -3x_1 - 2x_2 - 2x_3 = 0 \\ -2x_1 - 2x_2 = 0 \\ -2x_1 - 4x_3 = 0 \end{cases}$

$\Downarrow$

și au soluțiile

$\begin{cases} x_1 = 2\alpha \\ x_2 = \alpha \\ x_3 = 2\alpha, \ \alpha \in \mathbb{R} \end{cases}$; $\begin{cases} x_1 = \beta \\ x_2 = 2\beta \\ x_3 = -2\beta, \ \beta \in \mathbb{R} \end{cases}$; $\begin{cases} x_1 = -2\gamma \\ x_2 = 2\gamma \\ x_3 = \gamma, \ \gamma \in \mathbb{R} \end{cases}$

<u>Subspațiile invariante</u> sunt $S_T(\lambda_1) = \{\vec{x} = \alpha(2,1,2), \alpha \in \mathbb{R}\}$

$S_T(\lambda_2) = \{\vec{x} = \beta(1,2,-2), \beta \in \mathbb{R}\}$ și

$S_T(\lambda_3) = \{\vec{x} = \gamma(-2,2,1) \mid \gamma \in \mathbb{R}\}$.

Fiecare dintre ele are dimensiunea 1

O Bază în fiecare dintre ele este formată din câte un vector propriu corespunzător. Luăm $\alpha = \beta = 1$ și $\gamma = -1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \vec{v}_1 = (2,1,2)$, $\vec{v}_2 = (1,2,-2)$, $\vec{v}_3 = (2,-2,-1)$

Avem că

$$T(\vec{v}_1) = \lambda_1 \vec{v}_1 = 2\vec{v}_1$$
$$T(\vec{v}_2) = \lambda_2 \vec{v}_2 = 5\vec{v}_2$$
$$T(\vec{v}_3) = \lambda_3 \vec{v}_3 = 8\vec{v}_3\ ,$$

conform definiției vectorului propriu.

Matricea C de trecere de la baza $\mathcal{B}$ la sistemul de vectori proprii $\mathcal{B}' = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ este

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det C = -27 \neq 0 \Rightarrow$$

$\mathcal{B}'$ bază în $\mathbb{R}^3$

Matricea lui T în baza $\mathcal{B}'$ are forma diagonală

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

fapt ce se poate verifica și folosind formula

$$B = C^{-1} G C.$$

În baza $\mathcal{B}'$ forma pătratică dată va avea expresia

$$(*) \quad h(\vec{x}') = 2x_1'^2 + 5x_2'^2 + 8x_3'^2$$

Toate pătratele sunt pozitive.

Numărul pătratelor este 3, cât dimensiunea spațiului $\mathbb{R}^3$. <u>Concluzia</u>: forma pătratică dată este <u>pozitiv definită</u>.

Să mai menționăm că în $(*)$ x_1', x_2', x_3' sunt coordonatele vectorului $\vec{x}$ în baza $\mathcal{B}'$, adică

$\vec{x} = x_1'\vec{v}_1 + x_2'\vec{v}_2 + x_3'\vec{v}_3$ sau $\vec{x} = (x_1', x_2', x_3')_{\mathcal{B}'}$.

Se știe că aceste coordonate sunt legate de vechile coordonate x_1, x_2, x_3 prin relația

$$\binom{*}{*} \quad \boxed{\underline{X}' = C^{-1}\underline{X}} \; ; \quad \underline{X}' = \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix}; \; \underline{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Prin urmare, dacă s-ar calcula C^{-1} și apoi $\underline{X}'$ prin formula $\binom{*}{*}$, s-ar obține x_1', x_2' și x_3' care, dacă s-ar înlocui în $(*)$, ar trebui să dea expresia lui $h(\vec{x})$ de la care am plecat. VERIFICAȚI!

Metoda lui Gauss

Constă în formarea de pătrate. Grupăm toți termenii care conțin x_1 (condiția ce trebuie îndeplinită este să existe $g_{11}x_1^2 = 5x_1^2$ și să fie diferit de zero). Avem

$$h(\vec{x}) = (5x_1^2 - 4x_1x_2 - 4x_1x_3) + 6x_2^2 + 4x_3^2$$

sau

$$h(\vec{x}) = \frac{1}{5}(25x_1^2 - 20x_1x_2 - 20x_1x_3) + 6x_2^2 + 4x_3^2.$$

Menționăm că am efectuat operația aceasta (înmulțire și împărțire prin 5 a parantezei) pentru că $25x_1^2 = (5x_1)^2$. Cu noua paranteză alcătuim un pătrat perfect. Acesta trebuie să fie $(5x_1 - 2x_2 - 2x_3)^2$ dacă adunăm și scădem:

$8x_2x_3$; $4x_2^2$; $4x_3^2$ $\Rightarrow$

$$h(\vec{x}) = \frac{1}{5}(5x_1 - 2x_2 - 2x_3)^2 - \frac{8}{5}x_2x_3 - \frac{4}{5}x_2^2 - \frac{4}{5}x_3^2 + 6x_2^2 + 4x_3^2 \Rightarrow$$

TEMA NR. 6

$$h(\vec{x}) = \frac{1}{5}(5x_1 - 2x_2 - 2x_3)^2 + \frac{26}{5}x_2^2 - \frac{8}{5}x_2x_3 + \frac{16}{5}x_3^2$$

Se observă că este mai avantajos să facem pătrat perfect cu termenii $\frac{16}{5}x_3^2 - \frac{8}{5}x_2x_3 = \frac{1}{5}(4x_3 - x_2)^2 - \frac{1}{5}x_2^2$

Prin urmare:

$$h(\vec{x}) = \frac{1}{5}(5x_1 - 2x_2 - 2x_3)^2 + 5x_2^2 + \frac{1}{5}(4x_3 - x_2)^2$$

Am obținut astfel (din nou) trei pătrate perfecte (altele decât prin metoda întâia), anume

$$(\ast\ast_\ast)\ h(\vec{x}) = \frac{1}{5}x_1'^2 + 5x_2'^2 + \frac{1}{5}x_3'^2, \quad \text{unde}$$

$$\binom{\ast\ast}{\ast\ast}\begin{cases} x_1' = 5x_1 - 2x_2 - 2x_3 \\ x_2' = x_2 \\ x_3' = -x_2 + 4x_3 \end{cases} \Rightarrow \underline{X}' = C^{-1}\underline{X},$$

unde C este matricea de trecere de la baza uzuală la baza în care expresia lui $h(\vec{x})$ are forma $(\ast\ast_\ast)$. Pentru a găsi baza în care are loc $(\ast\ast_\ast)$ trebuie determinată C cunoscând că

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow C = (C^{-1})^{-1}$$

$\det C^{-1} = 20 \Rightarrow \det C = \frac{1}{20}$

sau, mai simplu, rezolvăm sistemul $\binom{\ast\ast}{\ast\ast}$ în privința lui x_1, x_2, x_3 căci $\underline{X} = C\underline{X}'$. Găsim

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{5}x_1' + \frac{1}{2}x_2' + \frac{1}{10}x_3' \\ x_2 = x_2' \\ x_3 = \frac{1}{4}x_2' + \frac{1}{4}x_3' \end{cases} \Rightarrow C = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{2} & \frac{1}{10} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

Baza în care h are expresia canonică $(\ast\ast_\ast)$ este $\mathcal{B}'' = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ cu $\vec{u} = \vec{e}\,C \Rightarrow$

$$\vec{u}_1 = \frac{1}{5}\vec{e}_1\ ; \quad \vec{u}_2 = \frac{1}{2}\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \frac{1}{4}\vec{e}_3\ ; \quad \vec{u}_3 = \frac{1}{10}\vec{e}_1 + \frac{1}{4}\vec{e}_3$$

Metoda lui Jacobi. Calculăm minorii principali extrași din G. $\Delta_1 = |g_{11}| = 5$ $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 6 \end{vmatrix} = 26$ $\Delta_3 = \det G = 80$. Prin definiție, luăm $\Delta_0 = 1$.

Conform metodei lui Jacobi, există o bază $\mathcal{B}''' = \{\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3\}$ în care forma pătratică are expresia canonică

$$h(\vec{x}) = \frac{\Delta_0}{\Delta_1}\eta_1^2 + \frac{\Delta_1}{\Delta_2}\eta_2^2 + \frac{\Delta_2}{\Delta_3}\eta_3^2,$$

unde $\vec{x} = (\eta_1, \eta_2, \eta_3)_{\mathcal{B}'''} = \eta_1\vec{f}_1 + \eta_2\vec{f}_2 + \eta_3\vec{f}_3$.

Se caută vectorii bazei noi $\mathcal{B}'''$ în forma (conform, din nou, metodei lui Jacobi)

$$\begin{cases} \vec{f}_1 = c_{11}\vec{e}_1 \\ \vec{f}_2 = c_{12}\vec{e}_1 + c_{22}\vec{e}_2 \\ \vec{f}_3 = c_{13}\vec{e}_1 + c_{23}\vec{e}_2 + c_{33}\vec{e}_3 \end{cases}$$

adică matricea de trecere $\mathcal{B} \xrightarrow{C} \mathcal{B}'''$ este "triunghiular superioară"

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ 0 & c_{22} & c_{23} \\ 0 & 0 & c_{33} \end{pmatrix}$$

Se determină elementele lui C din condițiile:

$$(***_{**})\quad F(\vec{f}_1, \vec{e}_1) = 1; \quad \begin{cases} F(\vec{f}_2, \vec{e}_1) = 0 \\ F(\vec{f}_2, \vec{e}_2) = 1 \end{cases}; \quad \begin{cases} F(\vec{f}_3, \vec{e}_1) = 0 \\ F(\vec{f}_3, \vec{e}_2) = 0 \\ F(\vec{f}_3, \vec{e}_3) = 1, \end{cases}$$

unde $F(\vec{x}, \vec{y})$ este forma biliniară simetrică de la care provine forma pătratică $h(\vec{x})$ (Se știe că $h(\vec{x}) = F(\vec{x}, \vec{x})$). Se vede că $F(\vec{x}, \vec{y}) = X^T G Y$.

Astfel sistemele $(***_{**})$ devin

TEMA NR. 6

$c_{11} g_{11} = 1$; $\begin{cases} c_{12} g_{11} + c_{22} g_{21} = 0 \\ c_{12} g_{12} + c_{22} g_{22} = 1 \end{cases}$; $\begin{cases} c_{13} g_{11} + c_{23} g_{21} + c_{33} g_{31} = 0 \\ c_{13} g_{12} + c_{23} g_{22} + c_{33} g_{32} = 0 \\ c_{13} g_{13} + c_{23} g_{23} + c_{33} g_{33} = 1 \end{cases}$

Având în vedere că matricea $G = \| g_{ij} \|$ este (vezi pg. 2)

$$G = \begin{pmatrix} 5 & -2 & -2 \\ -2 & 6 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{sistemele}$$

$5 c_{11} = 1$; $\begin{cases} 5 c_{12} - 2 c_{22} = 0 \\ -2 c_{12} + 6 c_{22} = 1 \end{cases}$; $\begin{cases} 5 c_{13} - 2 c_{23} - 2 c_{33} = 0 \\ -2 c_{13} + 6 c_{23} = 0 \\ -2 c_{13} + 4 c_{33} = 1 \end{cases}$

care au respectiv soluțiile:

$c_{11} = \frac{1}{5}$; $\begin{cases} c_{12} = \frac{1}{13} \\ c_{22} = \frac{5}{26} \end{cases}$; $\begin{cases} c_{13} = \frac{3}{20} \\ c_{23} = \frac{1}{20} \\ c_{33} = \frac{13}{40} \end{cases}$.

Prin urmare, matricea de trecere C este

$$C = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{13} & \frac{3}{20} \\ 0 & \frac{5}{26} & \frac{1}{20} \\ 0 & 0 & \frac{13}{40} \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{\underline{X} = C\eta}$$

Deci, baza este

$$\begin{cases} \vec{f}_1 = \frac{1}{5} \vec{e}_1 \\ \vec{f}_2 = \frac{1}{13} \vec{e}_1 + \frac{5}{26} \vec{e}_2 \\ \vec{f}_3 = \frac{3}{20} \vec{e}_1 + \frac{1}{20} \vec{e}_2 + \frac{13}{40} \vec{e}_3 \end{cases}$$

Coordonatele vechi, adică x_1, x_2, x_3, se leagă de cele noi prin $\underline{X} = C\eta$. Deci, dacă am înlocui

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{5} \eta_1 + \frac{1}{13} \eta_2 + \frac{3}{20} \eta_3 \\ x_2 = \frac{5}{26} \eta_2 + \frac{1}{20} \eta_3 \\ x_3 = \frac{13}{40} \eta_3 \end{cases}$$

în forma inițială a lui $h(\vec{x})$ trebuie să obținem

$h(\vec{x}) = \frac{1}{5} \eta_1^2 + \frac{5}{26} \eta_2^2 + \frac{13}{40} \eta_3^2$ VERIFICAȚI!

2. Să se studieze dacă endomorfismul $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$,

$$T(\vec{x}) = (x_1 - x_2 + x_3,\ x_1 + x_2 - x_3,\ -x_2 + 2x_3),$$

unde $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$, admite formă diagonală.

Rezolvare. Prin endomorfism se înțelege o transformare liniară pe un spațiu vectorial V peste câmpul $\mathbb{K}$, $T: V \to V$.

Matricea A a endomorfismului este

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Forma diagonală a lui T ar trebui să fie ~~de~~ $T(\vec{x}) = (\lambda_1 x_1', \lambda_2 x_2', \lambda_3 x_3')$, unde x_1', x_2', x_3' sunt coordonatele vectorului $\vec{x}$ într-o bază $\mathcal{B}' = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\} \subset \mathbb{R}^3$. Matricea A' corespunzătoare este

$$A' = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix},$$

de unde se vede că $T(\vec{v}_1) = \lambda_1 \vec{v}_1$, $T(\vec{v}_2) = \lambda_2 \vec{v}_2$, $T(\vec{v}_3) = \lambda_3 \vec{v}_3$. Prin urmare $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ ar trebui să fie valorile proprii ale lui T iar $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ vectorii proprii corespunzători.

Valorile proprii ale lui T sunt rădăcinile ecuației caracteristice $P(\lambda) = 0$, unde $P(\lambda) = \det(A - \lambda I_3)$ iar $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ este matricea unitate de ordin 3.

Se găsește $P(\lambda) = -\lambda^3 + 4\lambda^2 - 5\lambda + 2$ (VERIFICAȚI!)

Ecuația caracteristică $\lambda^3 - 4\lambda^2 + 5\lambda - 2 = 0$ are rădăcinile $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ și $\lambda_3 = 2$.

Așadar valorile proprii ale lui T sunt $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 1$, și $\lambda_3 = 2$.

Determinăm vectorii proprii corespunzători rezolvând sistemele liniare și omogene de 3 ecuații cu 3 necunoscute:

$$(A - 1 \cdot I_3)\bar{X} = 0 \; ; \qquad (A - 2I_3)\bar{X} = 0$$

$$\Downarrow \qquad\qquad\qquad\qquad \Downarrow$$

$$\begin{cases} -x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 \qquad - x_3 = 0 \\ -x_2 + x_3 = 0 \end{cases} ; \qquad \begin{cases} -x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 - x_3 = 0 \\ \qquad -x_2 \qquad = 0 \end{cases}$$

$$\Downarrow \qquad\qquad\qquad\qquad \Downarrow$$

<u>Un singur vector propriu</u> $\vec{v}_1 = (1, 1, 1)$; Vectorul propriu corespunzător este $\vec{v}_3 = (1, 0, 1)$

Dacă ar fi existat doi vectori proprii liniar independenți corespunzători valorii proprii duble $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, atunci aceștia împreună cu $\vec{v}_3$ ar fi format o bază în care matricea A' a transformării liniare are forma diagonală
$$A' = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 = \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

Cum <u>nu există doi vectori proprii liniar independenți corespunzători</u> valorii proprii duble $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, rezultă că T <u>nu admite formă diagonală</u>.

TEMA NR. 6

3. Matricea transformării liniare (endomorfismului) $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ în baza canonică $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1 = (1,0,0), \vec{e}_2 = (0,1,0), \vec{e}_3 = (0,0,1)\}$ este

$$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -2 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Să se arate că T este transformare liniară ortogonală.

Să se calculeze $\|\vec{x}\|$ și $\|T(\vec{x})\|$, unde $\vec{x} = (-1, 3, 1)$, iar $\|\cdot\|$ (norma) este indusă de produsul scalar standard (canonic) pe $\mathbb{R}^3$.

Rezolvare. Transformarea liniară $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ este ortogonală dacă și numai dacă matricea sa într-o bază ortonormată este ortogonală.

O matrice A se zice că este ortogonală dacă $A^{-1} = A^T$, adică dacă $AA^T = A^TA = I_3$.

Se știe că $\mathcal{B}$ este bază ortonormată în produsul scalar standard $\vec{x} \cdot \vec{y} = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$, unde $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$ și $\vec{y} = (y_1, y_2, y_3)$.

Calculând $A \cdot A^T$, ca și $A^T \cdot A$, deducem că $A \cdot A^T = A^T \cdot A = I_3$, adică A este matrice ortogonală.

Conform afirmației de mai sus $\Rightarrow T$ ortogonală.

Norma Euclidiană $\|\vec{x}\| = \sqrt{\vec{x} \cdot \vec{x}} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$

Deci $\|\vec{x}\| = \sqrt{(-1)^2 + 3^2 + 1^2} = \sqrt{11}$.

$$T(\vec{x}) = \vec{e}\ \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -2 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\vec{e}\begin{pmatrix} 5 \\ -7 \\ -5 \end{pmatrix} = \left(\frac{5}{3}, -\frac{7}{3}, -\frac{5}{3}\right) \Rightarrow \|T(\vec{x})\| = \sqrt{11}$$

Așadar, $\|\vec{x}\| = \|T(\vec{x})\| = \sqrt{11}$. Se constată că $\forall \vec{x} \in \mathbb{R}^3$ vom avea $\|\vec{x}\| = \|T(\vec{x})\|$. Aceasta se întâmplă pentru că T este și simetric.

TEMA NR. 6

biletul

(4). Să se studieze dacă $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$,
$T(\vec{x}) = (4x_1 - 3x_2 - 3x_3,\ 6x_1 - 5x_2 - 6x_3,\ x_3)$,
$\vec{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ admite formă diagonală.
În caz afirmativ, scrieți expresia diagonală a lui T și precizați baza în care are loc această expresie.

Rezolvare. T este endomorfism. În baza canonică din $\mathbb{R}^3$, T are matricea

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -3 & -3 \\ 6 & -5 & -6 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Valorile proprii ale lui T sunt rădăcinile ecuației caracteristice $P(\lambda) = \det(A - \lambda I_3) = 0$.
Se găsește $(\lambda - 1)(\lambda^2 + \lambda - 2) = 0$. Se vede că $\lambda = 1$ este valoare proprie dublă, iar $\lambda_3 = 2$ este valoare proprie simplă.

Determinăm vectorii proprii corespunzători. Trebuie să rezolvăm sistemele: $(A - 1 \cdot I_3)X = 0$ și $(A - 2 \cdot I_3)X = 0$, sau

$$\begin{cases} 3x_1 - 3x_2 - 3x_3 = 0 \\ 6x_1 - 6x_2 - 6x_3 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} ; \qquad \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 - 3x_3 = 0 \\ 6x_1 - 7x_2 - 6x_3 = 0 \\ -x_3 = 0 \end{cases}$$

$\Downarrow$

$x_1 = x_2 + x_3$

$\xrightarrow{x_2 = 1;\ x_3 = 0}$ $\vec{v}_1 = (1, 1, 0)$

$\xrightarrow[x_3 = 1]{x_2 = 0}$ $\vec{v}_2 = (1, 0, 1)$

$\Downarrow$

$x_3 = 0$, $x_1 = \frac{3}{2} x_2$

Luând $x_2 = 2 \Rightarrow$

$\vec{v}_3 = (3, 2, 0)$

Avem $T(\vec{v}_1) = 1 \cdot \vec{v}_1$; $T(\vec{v}_2) = 1 \cdot \vec{v}_2$; $T(\vec{v}_3) = 2\vec{v}_3$ și $B' = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ bază în $\mathbb{R}^3$. În concluzie,

transformarea liniară admite forma diagonală
$$T(\vec{x}) = (x_1', x_2', 2x_3'),$$
unde $\vec{x} = (x_1', x_2', x_3')_{\mathcal{B}'}$, iar matricea sa în baza $\mathcal{B}'$ formată de vectorii proprii este diagonală, adică
$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

5. Să se cerceteze dacă $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$,
$$T(\vec{x}) = (4x_1 - x_2,\ 3x_1 + x_2 - x_3,\ x_1 + x_3)$$
admite formă diagonală și să se scrie această formă diagonală, dacă este cazul

Soluție. Ca și la exercițiile precedente, determinăm valorile proprii rezolvând ecuația $P(\lambda) = 0$. Se găsește $\lambda^3 - 6\lambda^2 + 12\lambda - 5 = 0$ cu rădăcinile reale și distincte două câte două
$$\lambda_1 = -1,\quad \lambda_2 = \frac{7-\sqrt{69}}{2},\quad \lambda_3 = \frac{7+\sqrt{69}}{2}.$$
Folosim rezultatul: la valori proprii distincte corespund vectori proprii liniar independenți, iar la trei valori proprii distincte două câte două vectorii proprii corespunzători formează o bază în $\mathbb{R}^3$. Fie aceștia $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\} = \mathcal{B}'$.
În baza $\mathcal{B}'$ matricea
$$A' = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{7-\sqrt{69}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{7+\sqrt{69}}{2} \end{pmatrix}$$
iar expresia diagonală a lui T este
$$T(\vec{x}) = \left(-x_1',\ \frac{7-\sqrt{69}}{2}x_2',\ \frac{7+\sqrt{69}}{2}x_3'\right),$$
unde $\vec{x} = (x_1', x_2', x_3')_{\mathcal{B}'}$.

TEMA NR. 6

pagina 15

6. Matricea transformării liniare (endomorfismului) $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ în baza canonică din $\mathbb{R}^3$ este

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -3 \\ 6 & 4 & -4 \\ 4 & 5 & -4 \end{pmatrix}.$$

Să se afle forma diagonală a acestei matrice.

<u>Rezolvare</u>. Analizând celelalte probleme rezultă că forma diagonală a matricei este

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

unde $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ sunt valorile proprii ale endomorfismului T. Găsim că ecuația caracteristică $P(\lambda) = \det(A - \lambda I_3) = 0$ este

$$\lambda^3 - 5\lambda^2 + 4\lambda + 6 = 0$$

Această ecuație are rădăcinile reale și distincte $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 1 - \sqrt{3}$, $\lambda_3 = 1 + \sqrt{3}$.

Deci

$$A' = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1-\sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1+\sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

7. Să se determine matricea operatorului liniar $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $T(\vec{x}) = (3x_1 + 2x_2, -x_1, 0)$ în baza $\mathcal{V} = \{\vec{v}_1 = (1, 2, 3), \vec{v}_2 = (2, 1, 3), \vec{v}_3 = (1, 1, 1)\} \subset \mathbb{R}^3$.

TEMA NR. 6

pagina 16

Rezolvare. $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1 = (1,0,0), \vec{e}_2 = (0,1,0), \vec{e}_3 = (0,0,1)\} \xrightarrow{C} \mathcal{V}$

unde
$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det C = 3 \neq 0 \Rightarrow \mathcal{V} \text{ bază.}$$

Fie B matricea lui T în baza $\mathcal{V}$. Știm că

$$B = C^{-1} A C$$

Calculăm C^{-1} scriind întâi transpusa C^T

$$C^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

și apoi adjuncta

$$C^* = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 3 & 3 & -3 \end{pmatrix} \Rightarrow C^{-1} = \frac{1}{3} C^*$$

$$B = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 3 & 3 & -3 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\cancel{B = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -19 & -20 & -11 \\ 11 & 13 & 7 \\ 30 & 21 & 12 \end{pmatrix}} \Rightarrow \cancel{\begin{aligned} T(\vec{v}_1) &= \tfrac{1}{3}(-19\vec{v}_1 + 11\vec{v}_2 + 30\vec{v}_3) \\ T(\vec{v}_2) &= \tfrac{1}{3}(-20\vec{v}_1 + 13\vec{v}_2 + 21\vec{v}_3) \\ T(\vec{v}_3) &= 10\vec{v}_1 + 7\vec{v}_2 + 4\vec{v}_3 \end{aligned}}$$

Rezultă

$$B = \begin{pmatrix} -5 & -6 & -\frac{11}{3} \\ 3 & 4 & \frac{7}{3} \\ 6 & 6 & 4 \end{pmatrix}.$$

TEMA NR. 6

pagina 17

7. Matricea transformării liniare (endomorfismului) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ în baza canonică $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1 = (1,0,0), \vec{e}_2 = (0,1,0), \vec{e}_3 = (0,0,1)\} \subset \mathbb{R}^3$ este

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 \\ -2 & 2 & -6 \\ -2 & 2 & -6 \end{pmatrix}.$$

Să se afle matricea B a lui T în baza

$$\mathcal{V} = \{\vec{v}_1 = (1,2,3), \vec{v}_2 = (1,1,1), \vec{v}_3 = (2,1,3)\} \subset \mathbb{R}^3.$$

Rezolvare. Fie C matricea de trecere de la baza $\mathcal{B}$ la baza $\mathcal{V}$. Atunci

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Se știe că

$$B = C^{-1} A C.$$

Se poate determina B și pe altă cale ținând cont că B are pe cele trei coloane coordonatele vectorilor $T(\vec{v}_1)$, $T(\vec{v}_2)$, $T(\vec{v}_3)$ raportați la baza $\mathcal{V}$. Avem

$$(*) \quad \begin{cases} T(\vec{v}_1) = T(\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + 3\vec{e}_3) = T(\vec{e}_1) + 2T(\vec{e}_2) + 3T(\vec{e}_3) \\ T(\vec{v}_2) = T(\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3) = T(\vec{e}_1) + T(\vec{e}_2) + T(\vec{e}_3) \\ T(\vec{v}_3) = T(2\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + 3\vec{e}_3) = 2T(\vec{e}_1) + T(\vec{e}_2) + 3T(\vec{e}_3) \end{cases}$$

Dar, $T(\vec{e}_1)$, $T(\vec{e}_2)$, $T(\vec{e}_3)$ se cunosc: coordonatele lor în baza canonică $\mathcal{B}$ sunt coloanele lui $A \Rightarrow$

$$(**) \quad \begin{cases} T(\vec{e}_1) = -\vec{e}_1 - 2\vec{e}_2 - 2\vec{e}_3 \\ T(\vec{e}_2) = 2\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + 2\vec{e}_3 \\ T(\vec{e}_3) = -3\vec{e}_1 - 6\vec{e}_2 - 6\vec{e}_3 \end{cases}$$

TEMA NR. 6

pagina 18

Din $(**)$ și $(*)$ rezultă:

$$\binom{*\,*}{*}\begin{cases} T(\vec{v}_1) = -6\vec{e}_1 - 16\vec{e}_2 - 16\vec{e}_3 \\ T(\vec{v}_2) = -2\vec{e}_1 - 6\vec{e}_2 - 6\vec{e}_3 \\ T(\vec{v}_3) = -9\vec{e}_1 - 20\vec{e}_2 - 20\vec{e}_3 \end{cases}$$

Pentru ca problema să fie rezolvată ar trebui să știm coordonatele bazei ~~vechi~~ în baza nouă, deci pe $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ exprimați ca și combinații liniare de $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$. Aceste exprimări vor rezulta din

$$\binom{*\,*}{*\,*}\begin{cases} \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + 3\vec{e}_3 = \vec{v}_1 \\ \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3 = \vec{v}_2 \\ 2\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + 3\vec{e}_3 = \vec{v}_3 \end{cases} \quad \text{sau} \quad \vec{e}\,C = \vec{v} \Rightarrow \vec{e} = \vec{v}\,C^{-1}$$

Putem ocoli calculul lui C^{-1} rezolvând sistemul $\binom{*\,*}{*\,*}$ în raport cu necunoscutele $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$. Obținem

$$\binom{*\,*\,*}{*\,*}\begin{cases} \vec{e}_1 = -\frac{2}{3}\vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \frac{1}{3}\vec{v}_3 \\ \vec{e}_2 = \frac{1}{3}\vec{v}_1 + \vec{v}_2 - \frac{2}{3}\vec{v}_3 \\ \vec{e}_3 = \frac{1}{3}\vec{v}_1 - \vec{v}_2 + \frac{1}{3}\vec{v}_3 \end{cases} \Rightarrow C^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 1 & 1 & -1 \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Înlocuim $\binom{*\,*\,*}{*\,*}$ în $\binom{*\,*}{*}$ și astfel obținem

$$\begin{cases} T(\vec{v}_1) = -\frac{20}{3}\vec{v}_1 - 6\vec{v}_2 + \frac{10}{3}\vec{v}_3 \\ T(\vec{v}_2) = -\frac{8}{3}\vec{v}_1 - 2\vec{v}_2 + \frac{4}{3}\vec{v}_3 \\ T(\vec{v}_3) = -\frac{22}{3}\vec{v}_1 - 9\vec{v}_2 + \frac{11}{3}\vec{v}_3 \end{cases}$$

Prin urmare

$$B = \begin{pmatrix} -\frac{20}{3} & -\frac{8}{3} & -\frac{22}{3} \\ -6 & -2 & -9 \\ +\frac{10}{3} & \frac{4}{3} & \frac{11}{3} \end{pmatrix} \overset{\text{din}}{\underset{\text{nou}}{=}} \begin{pmatrix} -\frac{20}{3} & -\frac{8}{3} & -\frac{22}{3} \\ -6 & -2 & -9 \\ \frac{10}{3} & \frac{4}{3} & \frac{11}{3} \end{pmatrix}.$$

Verificați dacă rezultatul găsit pentru B este corect efectuând produsele de matrice $C^{-1}AC$.

TEMA NR. 6

(8) Să se determine forma diagonală a endomorfismului $T: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, definit prin

$$T(\vec{x}) = (x_1 - x_3, x_2 - 2x_3, -x_1 - 2x_2),$$

unde $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$.

Rezolvare. Matricea lui T în baza canonică din $\mathbb{R}^3$ este

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

iar polinomul caracteristic $P(\lambda) = \det(A - \lambda I_3)$ are expresia $P(\lambda) = -\lambda^3 + 2\lambda^2 + 4\lambda - 5$. Ecuația caracteristică $P(\lambda) = 0 \Rightarrow \lambda^3 - 2\lambda^2 - 4\lambda + 5 = 0$ are rădăcinile reale distincte $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = \frac{1 - \sqrt{21}}{2}$, $\lambda_3 = \frac{1+\sqrt{21}}{2}$. Acestor rădăcini, care sunt valorile proprii ale lui T le corespund trei vectori proprii liniari independenți în $\mathbb{R}^3$, deci constituie o nouă bază. În această bază, matricea lui T are forma diagonală

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1-\sqrt{21}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1+\sqrt{21}}{2} \end{pmatrix}.$$

(9) Să se arate că $T: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$,

$$T(\vec{x}) = (x_1 - x_3, -6x_1 - 3x_2 + x_3, x_1 + x_2 + x_3)$$

este un <u>automorfism</u> (endomorfism inversabil) și să se calculeze $T(\vec{x})$, $T^{-1}(\vec{x})$ dacă $\vec{x} = (-2, -1, 2)$.

Rezolvare Ecuația vectorială a endomorfismului T este $\vec{y} = T(\vec{x})$, unde $T(\vec{x}) = \vec{e}(AX)$, unde

TEMA NR. 6

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -6 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ este matricea lui T în baza canonică din $\mathbb{R}^3$, iar $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ este matricea coloană a coordonatelor vectorului arbitrar $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$, $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3) = \vec{e}X$ și Y este matricea coloană a vectorului imagine $\vec{y} = T(\vec{x})$, adică $\vec{y} = \vec{e}Y$.

Din ecuația vectorială $\vec{y} = T(\vec{x})$ obținem pe cea matriceală

$$Y = AX.$$

Pentru ca T să fie inversabil trebuie ca din $\vec{y} = T(\vec{x})$ să putem scoate în mod unic pe $\vec{x}$ și anume $\vec{x} = T^{-1}(\vec{y})$. Luând în calcul ecuația matriceală constatăm că acest lucru este posibil dacă și numai dacă A este matrice inversabilă. Calculând $\det A = -1 \neq 0 \Rightarrow \exists A^{-1}$

Evident $T^{-1}(\vec{x}) = \vec{e}\,(A^{-1}X)$.

$$T(\vec{x}) = T(-2,-1,2) = \vec{e}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -6 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \vec{e}\begin{pmatrix} -4 \\ 17 \\ -1 \end{pmatrix} =$$

$= -4\vec{e}_1 + 17\vec{e}_2 - \vec{e}_3 = (-4, 17, -1)$. Așadar

$$T(\vec{x}) = (-4, +17, -1).$$

Calculând inversa lui A găsim $A^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 3 \\ -7 & -2 & -5 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

$$A^{-1}X = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 3 \\ -7 & -2 & -5 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix}, \text{ deci}$$

$$T^{-1}(\vec{x}) = (-3, 6, -1) = -3\vec{e}_1 + 6\vec{e}_2 - \vec{e}_3.$$

(10) Să se determine câte o bază în nucleul $\operatorname{Ker} T$ și imaginea $\operatorname{Im} T$ ale operatorului liniar (transformarea liniară, endomorfismul) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$,

$$T(\vec{x}) = (x_1 + 2x_2 + x_3,\ -x_1 + x_2 + 2x_3,\ x_2 + 2x_3),$$

unde $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$.

TEMA NR. 6

pagina 21

Amintim că: $\operatorname{Ker} T = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid T(\vec{x}) = \vec{0}\}$ şi

$\operatorname{Im} T = \{\vec{y} \in \mathbb{R}^3 \mid \exists\, \vec{x} \in \mathbb{R}^3 \text{ a.î. } T(\vec{x}) = \vec{y}\}$

Prin urmare, trebuie să aflăm soluţiile ecuaţiei vectoriale $T(\vec{x}) = \vec{0} \iff \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \\ x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$

Din ultimele două ecuaţii rezultă $x_1 = 0$ şi deci $x_2 = -2x_3$ care introdusă în prima ecuaţie dă $x_3 = 0 \Rightarrow x_2 = 0$

Aşadar $\operatorname{Ker} T = \{\vec{0}\} \Rightarrow \dim \operatorname{Ker} T = 0 = d =$ defectul lui $T \Rightarrow \operatorname{Im} T = \mathbb{R}^3$. O bază în $\operatorname{Im} T$ poate fi chiar baza canonică.

11) Să se determine endomorfismul $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ cunoscând că $T(\vec{v}_1) = \vec{w}_1$, $T(\vec{v}_2) = \vec{w}_2$, $T(\vec{v}_3) = \vec{w}_3$, unde $\vec{v}_1 = (-1, 0, 2)$, $\vec{v}_2 = (2, 3, 1)$, $\vec{v}_3 = (3, 1, 1)$ şi $\vec{w}_1 = (1, 0, 1)$, $\vec{w}_2 = (0, 5, 1)$, $\vec{w}_3 = (3, 7, -2)$.

__Rezolvare.__ Trebuie determinaţi vectorii $T(\vec{e}_1)$, $T(\vec{e}_2)$, $T(\vec{e}_3)$ pentru a putea scrie expresia operatorului liniar T. Aceşti vectori vor rezulta din sistemul

$$\begin{cases} T(\vec{v}_1) = \vec{w}_1 \\ T(\vec{v}_2) = \vec{w}_2 \\ T(\vec{v}_3) = \vec{w}_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -T(\vec{e}_1) + 2T(\vec{e}_3) = \vec{w}_1 \\ 2T(\vec{e}_1) + 3T(\vec{e}_2) + T(\vec{e}_3) = \vec{w}_2 \\ 3T(\vec{e}_1) + T(\vec{e}_2) + T(\vec{e}_3) = \vec{w}_3 \end{cases}$$

Rezolvând sistemul, găsim

$$\begin{cases} T(\vec{e}_1) = -\frac{1}{8}(w_1 + w_2 - 3w_3) = (1, 2, -1) \\ T(\vec{e}_2) = -\frac{1}{16}(w_1 - 7w_2 + 5w_3) = (-1, 0, 1) \\ T(\vec{e}_3) = \frac{1}{16}(7w_1 - w_2 + 3w_3) = (1, 1, 0) \end{cases} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Expresia lui $T(\vec{x})$ este

$$T(\vec{x}) = (x_1 - x_2 + x_3,\ 2x_1 + x_3,\ -x_1 + x_2)$$

TEMA NR. 6

pagina 22

Probleme propuse cu indicații și răspunsuri

(1) Să se aducă la forma canonică prin metoda lui Gauss, forma pătratică $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$,

$$h(\vec{x}) = x_1^2 - 6x_1x_2 + 6x_1x_3 + 10x_2^2 + x_3^2 - 2x_2x_3,$$

precizându-se și baza în care are loc forma canonică determinată.

<u>Indicație</u>. Se grupează primii trei termeni, se adună și se scade ce-i necesar pentru a forma un trinom la pătrat. Cu termenii rămași, care nu mai au x_1 ca factor, se procedează similar.

<u>Răspuns</u>. $h(\vec{x}) = y_1^2 + y_2^2 - 24y_3^2$, unde $\begin{cases} y_1 = x_1 - 3x_2 + 3x_3 \\ y_2 = x_2 + 4x_3 \\ y_3 = x_3 \end{cases}$

sau $Y = C^{-1}X$. Se găsește $C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -15 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ și deci baza în care are loc expresia canonică de mai sus este $\mathcal{B}' = \{\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3\}$ $\vec{f} = \vec{e}\,C \Rightarrow \begin{cases} \vec{f}_1 = \vec{e}_1 \\ \vec{f}_2 = 3\vec{e}_1 + \vec{e}_2 \\ \vec{f}_3 = -15\vec{e}_1 - 4\vec{e}_2 + \vec{e}_3 \end{cases}$

(2). Să se afle matricea endomorfismului $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ știind că $T(\vec{v}_1) = \vec{w}_1$, $T(\vec{v}_2) = \vec{w}_2$, $T(\vec{v}_3) = \vec{w}_3$, unde $\vec{v}_1 = (2,3,1)$, $\vec{v}_2 = (-1,0,2)$, $\vec{v}_3 = (3,1,1)$
$\vec{w}_1 = (0,5,1)$, $\vec{w}_2 = (1,0,1)$, $\vec{w}_3 = (3,7,-2)$.

<u>Indicație</u>. Vezi exercițiul (11) de la pagina 21, TEMA 6.

(3). Fie operatorul liniar $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$,

$$T(\vec{x}) = (x_1 - x_2 + 2x_3,\ -2x_1 + 2x_2 - 4x_3),$$ unde $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$.

Să se determine câte o bază în $\mathrm{Ker}\,T$ și $\mathrm{Im}\,T$ și să se arate că T nu este nici injectivă și nici aplicație surjectivă.

TEMA NR. 6

pagina 23

(4) Matricea operatorului liniar $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ în baza canonică este $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

Să se determine valorile proprii și vectorii proprii. Să se precizeze dacă matricea lui T într-o anumită bază poate fi diagonală.

<u>Indicație</u>. Vezi exercițiul (2), pagina 10, TEMA NR. 6.

(5). Fie operatorul liniar $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$,

$$T(\vec{x}) = (x_1 + x_2, x_1, x_2)$$

Să se determine $\operatorname{Ker} T$, $\operatorname{Im} T$ și să se arate că T este injectivă dar nu și surjectivă.

<u>Indicație</u> Arătați că $\operatorname{Ker} T = \{\vec{0}\}$ (simplu) de unde rezultă T injectivă și defectul este 0, $d = 0$. Știm că rang + defect $= \dim \mathbb{R}^2 = 2 \Rightarrow$ rang $= 2$. Dar rang $= \dim \operatorname{Im} T \Rightarrow \dim \operatorname{Im} T = 2$ și $\operatorname{Im} T \subset \mathbb{R}^3$ adică $\operatorname{Im} T$ este un subspațiu liniar <u>strict</u> al lui $\mathbb{R}^3$, ca atare nu poate fi surjectivă.

(6) Să se arate că transformarea liniară $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$
$T(\vec{x}) = (x_1 + x_2 - 2x_3, x_2, x_1 - x_3)$ este un izomorfism și să se afle matricea lui T în baza

$$\mathcal{B}' = \{\bar{v}_1 = (1,2,3), \bar{v}_2 = (2,1,3), \bar{v}_3 = (1,1,1)\}.$$

(7) Să se aducă la forma canonică prin două metode, forma pătratică

$$h(\vec{x}) = x_1^2 - 2x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 - 8x_1x_3 - 4x_2x_3.$$

TEMA NR. 6

(8). Să se arate că transformarea (funcția) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$$T(\vec{x}) = (x_1 + x_2 + x_3,\ x_1 + x_2 + x_3,\ x_1 + x_2 + x_3)$$

nu este un izomorfism și apoi să se determine câte o bază în nucleul Ker T și imaginea Im T ale lui T.

Răspuns T este endomorfism pt că $T(\vec{x}) = \vec{e}(AX)$, unde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(9) Să se aducă la expresia (forma) canonică, prin toate metodele cunoscute, forma pătratică $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$,

$$h(\vec{x}) = x_1 x_2 + 2x_1 x_3 - 4x_2 x_3,$$

unde $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$.

Indicație. Pentru a aplica metoda lui Gauss (formare de pătrate) se efectuează întâi schimbarea de variabile

$$\begin{cases} x_1 = y_1 + y_2 \\ x_2 = y_1 - y_2 \\ x_3 = \qquad\quad y_3. \end{cases}$$

În acest fel $h(\vec{x}) = y_1^2 - y_2^2 - 2y_1 y_3 - 6y_2 y_3$ și de aici înainte se aplică metoda lui Gauss. (vezi seminar nr. 5 studenți grupa 8102).

(10) Să se determine câte o bază în nucleul Ker T și Im T ale operatorului liniar $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, definit prin

$$T(\vec{x}) = (x_1 - x_2 + 2x_3,\ x_1 + x_3).$$